6. Integralrechnung

6.1 Stammfunktionen

Zentraler Baustein der Flächenberechnung mit Hilfe des Integrals ist die Bestimmung der Stammfunktion. Nachfolgend werden die Fälle, mit denen man es gängigerweise bei gebrochenrationalen Funktionen zu tun hat, vorgestellt. Auf die Integrationskonstante “*c*“ wir in allen Fällen verzichtet, da sie für die Flächenberechnung nicht von Bedeutung ist.

6.1.1 Einfache Form

Unter die Rubrik „Einfache Form“ fallen gebrochenrationale Funktionen, deren Nenner nur aus einer einfachen Potenzfunktion besteht. Insbesondere darf aber der Nenner keine Summen oder Differenzen enthalten. Zur Berechung einer Stammfunktion nutzt man die Potenzregel bzw. Logarithmusregel:

1. Für $n \neq -1$ gilt: $f(x) = a \cdot x^n \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$

2. Für $n = -1$ gilt: $f(x) = a \cdot x^{-1} \;\Rightarrow\; F(x) = a \cdot \ln|x|$

Beispiel 1: $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^4}$

1. Zerlegen in Einzelbrüche:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^4} - \frac{1}{2x^4} = \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4}$$

2. Umschreiben in Potenzschreibweise:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-4}$$

3. Anwenden der Potenzregel:

$$F(x) = -\frac{3}{2}x^{-1} + \frac{1}{6}x^{-3}$$

4. Umschreiben in Einzelbrüche und Bilden des Hauptnenners:

$$F(x) = -\frac{3}{2x} + \frac{1}{6x^3} = \frac{-9x^2 + 1}{6x^3}$$

<u>**Beispiel 2:**</u> $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{3x^3}$

1. Zerlegen in Einzelbrüche:

$$f(x) = \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{3x}$$

2. Umschreiben in Potenzschreibweise:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{-3} - \frac{1}{3}x^{-1}$$

3. Anwenden der Potenz- und der Logarithmusregel:

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^{-2} - \frac{1}{3}\ln|x|$$

4. Umschreiben in Einzelbrüche und Bilden des Hauptnenners:

$$F(x) = -\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3} \cdot \ln|x| = -\frac{1 + x^2 \cdot \ln|x|}{3x^2}$$

6.1.2 Die lineare Verkettung

Bei der linearen Verkettung handelt es sich um die Verkettung einer „äußeren Funktion“ mit einer linearen Funktion ($y = rx + s$)

Bezogen auf gebrochenrationale Funktionen ergeben sich damit folgende Regeln:

1. Für $n \neq -1$ gilt: $f(x) = a \cdot (rx+s)^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{(n+1) \cdot r} \cdot (rx+s)^{n+1}$

2. Für $n = -1$ gilt: $f(x) = a \cdot (rx+s)^{-1} \Rightarrow F(x) = \frac{a}{r} \cdot \ln|rx+s|$

Beispiel 1: $f(x) = \frac{5}{4(3x-1)^3}$

1. Umschreiben in Potenzschreibweise:

$$f(x) = \frac{5}{4} \cdot (3x-1)^{-3}$$

2. Anwenden der Regel für die lineare Verkettung:

$$F(x) = \frac{5}{4 \cdot (-2) \cdot 3} \cdot (3x-1)^{-2} = -\frac{5}{24} \cdot (3x-1)^{-2}$$

3. Umschreiben in Bruchschreibweise:

$$F(x) = -\frac{5}{24 \cdot (3x-1)^2}$$

Beispiel 2: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$

1. Umschreiben in Potenzschreibweise:

$$f(x) = 2 \cdot (3x-1)^{-1}$$

2. Anwenden der Regel für die lineare Verkettung:

$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot \ln|3x-1|$$

6.1.3 Logarithmische Integration

Von gebrochenrationalen Funktionen, deren Zähler aus der Ableitung des Nenners besteht, lässt sich folgendermaßen die Stammfunktion bestimmen:

$$\boxed{f(x) = a \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = a \cdot \ln|u(x)|}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{12x+4}{3x^2+2x}$

1. Geschicktes Ausklammern:

$$f(x) = \frac{12x+4}{3x^2+2x} = 2 \cdot \frac{6x+2}{3x^2+2x}, \text{ mit } u(x) = 3x^2 + 2x \text{ und } u'(x) = 6x + 2.$$

2. Anwenden der Regel für die logarithmische Integration:

$$F(x) = 2 \cdot \ln|3x^2 + 2x|$$

6.1.4 Komplizierte Formen

Hat eine gebrochenrationale Funktion $f(x)$ nicht eine der in den Kapiteln 6.1.1 bis 6.1.3 beschriebene Form, so sind wir mit unseren Mitteln (also ohne „Produktintegration" bzw. „Partielle Integration" und „Integration durch Substitution") nicht in der Lage, eine Stammfunktion anzugeben. In diesen Fällen wird in der Aufgabenstellung eine Stammfunktion $F(x)$ vorgegeben. Aufgabe ist dann, zu zeigen, dass $F(x)$ wirklich eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Dazu nutzt man folgende Beziehung zwischen $f(x)$ und $F(x)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Beispiel:

Zu zeigen ist, dass $F(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ ist.

1. Separates Ableiten der Zähler- und Nennerfunktion:

$$u(x) = x^2 + x + 1 \qquad u'(x) = 2x + 1$$

$$v(x) = x + 1 \qquad v'(x) = 1$$

2. Anwenden der Quotientenregel:

$$F'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x+1) - (x^2+x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$F'(x) = f(x)$ q.e.d.

6.2 Berechnung von Flächeninhalten

Die Berechnung von Flächeninhalten erfolgt mit Hilfe der Integralrechnung. Dazu hat man folgende vier Fragen zu klären:

1. Welche Funktion $f(x)$ begrenzt die Fläche „von oben“
2. Welche Funktion $g(x)$ begrenzt die Fläche „von unten“
3. Wie lautet die „linke *x*-Grenze“ x_1?
4. Wie lautet die „rechte *x*-Grenze“ x_2?

Der Ansatz für die Flächenberechnung lautet dann:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (\underbrace{f(x) - g(x)}_{=h(x)})\, dx = \left[H(x)\right]_{x_1}^{x_2} = (H(x_2) - H(x_1))$$

6.2.1 Fläche mit der x-Achse

<u>Beispiel 1:</u> Fläche oberhalb der x-Achse

Gesucht ist der Flächeninhalt, den das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{-x^3+1}{x^2}$ mit der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = -1$ einschließt.

1. Veranschaulichung des Sachverhaltes:

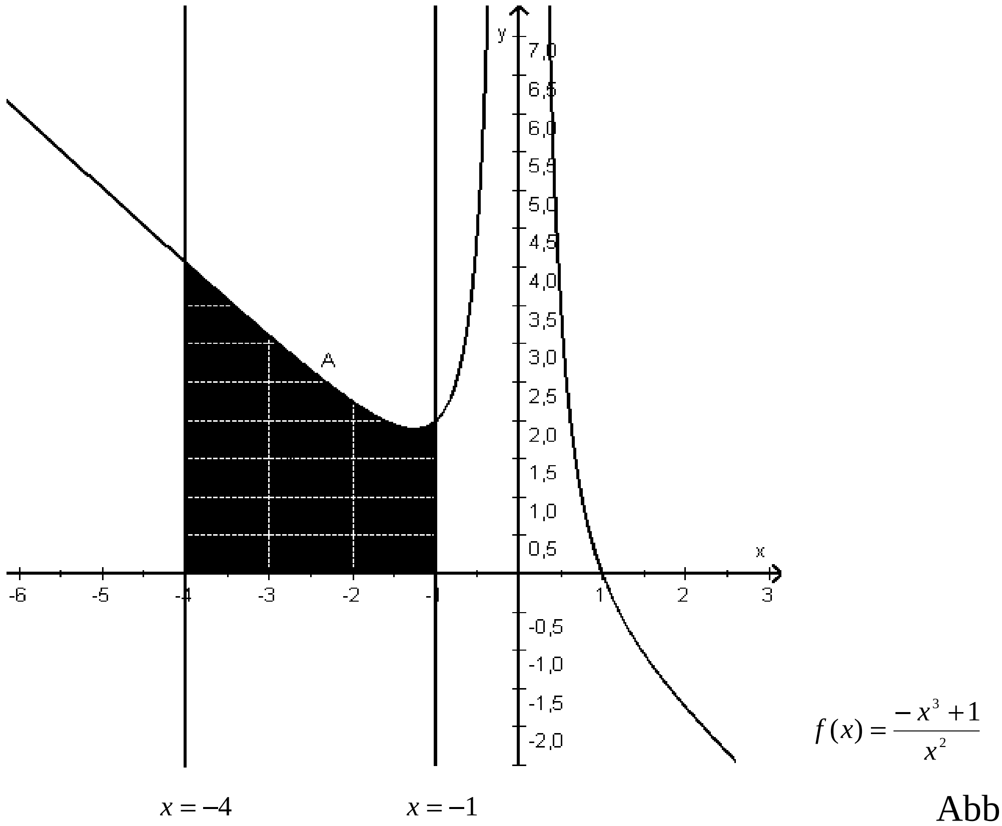


Abb. 15

2. Feststellen der Begrenzungen:

obere Funktion: $f(x) = \frac{-x^3+1}{x^2}$

untere Funktion: $g(x) = 0$

linke x-Grenze: $x = -4$

rechte x-Grenze: $x = -1$

3. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\underline{A} = \int_{-4}^{-1} \left(\frac{-x^3+1}{x^2} - 0\right) dx = \int_{-4}^{-1} (-x + x^{-2}) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - x^{-1}\right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \right]_{-4}^{-1} = \left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{1}{(-1)} \right) - \left(-\frac{1}{2}(-4)^2 - \frac{1}{(-4)} \right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-8 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} + 7\frac{3}{4} = \underline{8{,}25}$$

<u>Beispiel 2:</u> Fläche unterhalb der x-Achse

Berechne den Flächeninhalt, den das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$ mit der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = -2$ einschließt.

1. Veranschaulichung des Sachverhaltes:

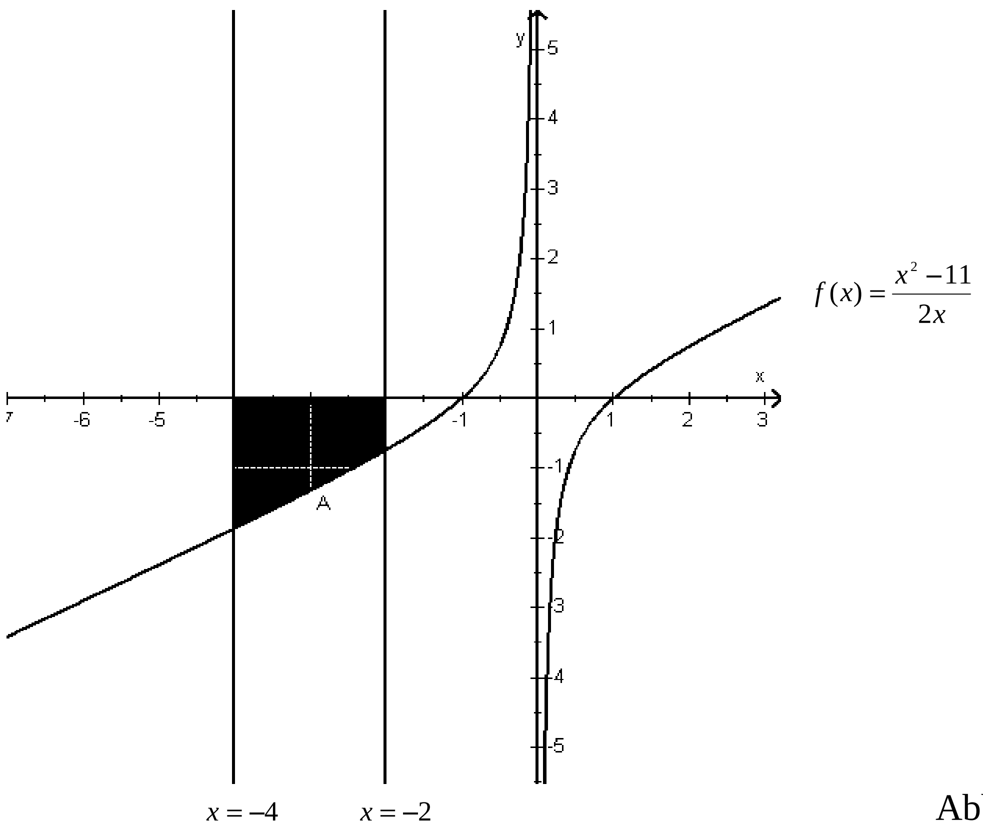


Abb. 16

2. Feststellen der Begrenzungen:

obere Funktion: $g(x) = 0$

untere Funktion: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$

linke x-Grenze: $x = -4$

rechte x-Grenze: $x = -2$

3. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\underline{A} = \int_{-4}^{-2} (0 - \frac{x^2 - 1}{2x}) dx = \int_{-4}^{-2} (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x| \right]_{-4}^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}(-2)^2 + \frac{1}{2}\ln|-2| \right) - \left(-\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{2}\ln|-4| \right) =$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{2}\ln 2 \right) - \left(-4 + \frac{1}{2}\ln 4 \right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \cdot (\ln 2 - \ln 4) = 3 + \frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{2}{4}) = 3 + \ln(2^{-1})^{\frac{1}{2}} = \underline{3 - \ln(\sqrt{2}) \approx 2{,}65}$$

6.2.2. Fläche zwischen zwei Funktionen

Beispiel:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und die Gerade mit der Gleichung $g(x) = -0{,}5x + 2{,}25$ begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Flächeninhalt.

1. Veranschaulichung des Sachverhaltes:

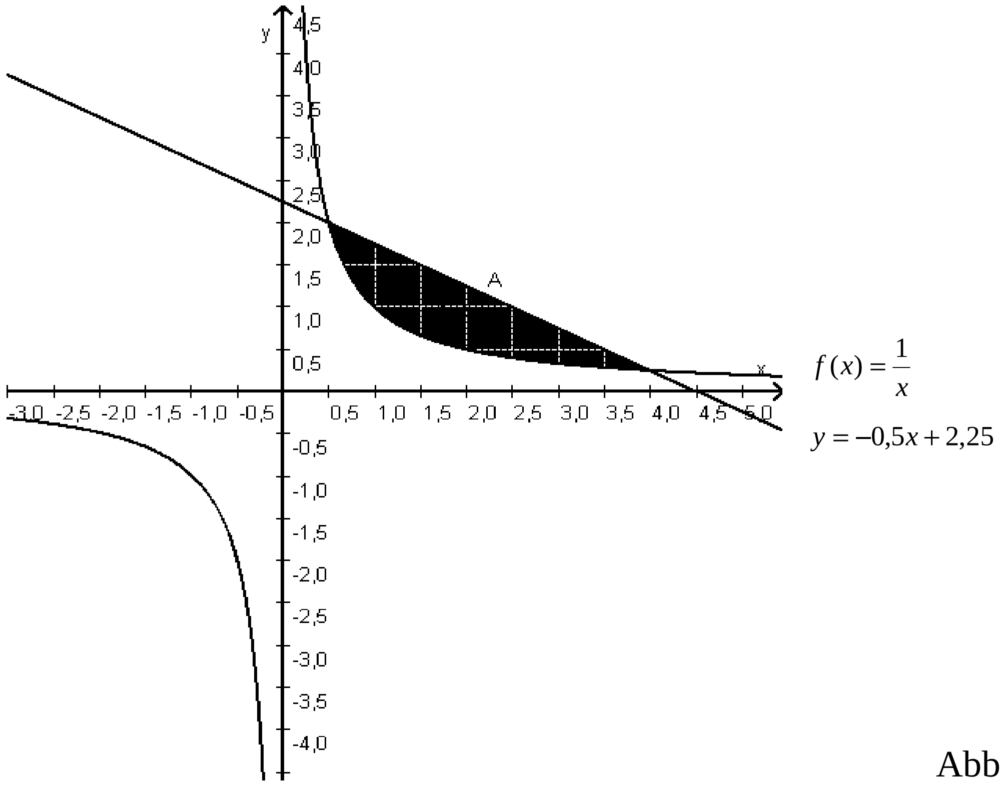


Abb. 17

2. Feststellen der bis jetzt bekannten Begrenzungen:

obere Funktion: $g(x) = -0{,}5x + 2{,}25$

untere Funktion: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

3. Berechnung der Integrationsgrenzen:

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = -0{,}5x + 2{,}25 \;\Rightarrow\; 1 = -0{,}5x^2 + 2{,}25x$$

$$\Rightarrow\; -0{,}5x^2 + 2{,}25x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{-2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-0{,}5)} =$$

$$= \frac{-2{,}25 \pm 1{,}75}{-1} \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = 0{,}5, \quad x_2 = 4}$$

linke x-Grenze: $x = 0{,}5$

rechte x-Grenze: $x = 4$

4. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\underline{A} = \int_{0,5}^{4} (-0{,}5x + 2{,}25 - \frac{1}{x})dx = [-0{,}25x^2 + 2{,}25x - \ln|x|]_{0,5}^{4} =$$

$$= (-0{,}25 \cdot 4^2 + 2{,}25 \cdot 4 - \ln 4) - (-0{,}25 \cdot 0{,}5^2 + 2{,}25 \cdot 0{,}5 - \ln 0{,}5) =$$

$$= (5 - \ln 4) - (1{,}0625 - \ln 0{,}5) = \ln(\frac{0{,}5}{4}) + 3{,}9375 = \underline{3{,}9375 - \ln 8 \approx 1{,}86}$$

6.2.3 Fläche zwischen Funktion und Asymptote

Beispiel:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{2x^2}$, ihre schiefe Asymptote sowie $x = 1$ und $x = 6$ begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Flächeninhalt.

1. Bestimmung der schiefen Asymptote (vgl. Kapitel 2.2.3):

$$(x^3 - 5x^2 + 4) : (2x^2) = \overbrace{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}^{\text{schiefe Asymptote}} + \overbrace{\frac{4}{2x^2}}^{\to 0 \text{ für } x \to \pm\infty} = \overbrace{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}^{\text{schiefe Asymptote}} + \overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0 \text{ für } x \to \pm\infty}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-x^3} \\ \quad -5x^2 + 4 \\ \underline{\quad -(-5x^2)} \\ \qquad\qquad 4 \end{array}$$

Schiefe Asymptote: $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

2. Veranschaulichung des Sachverhaltes:

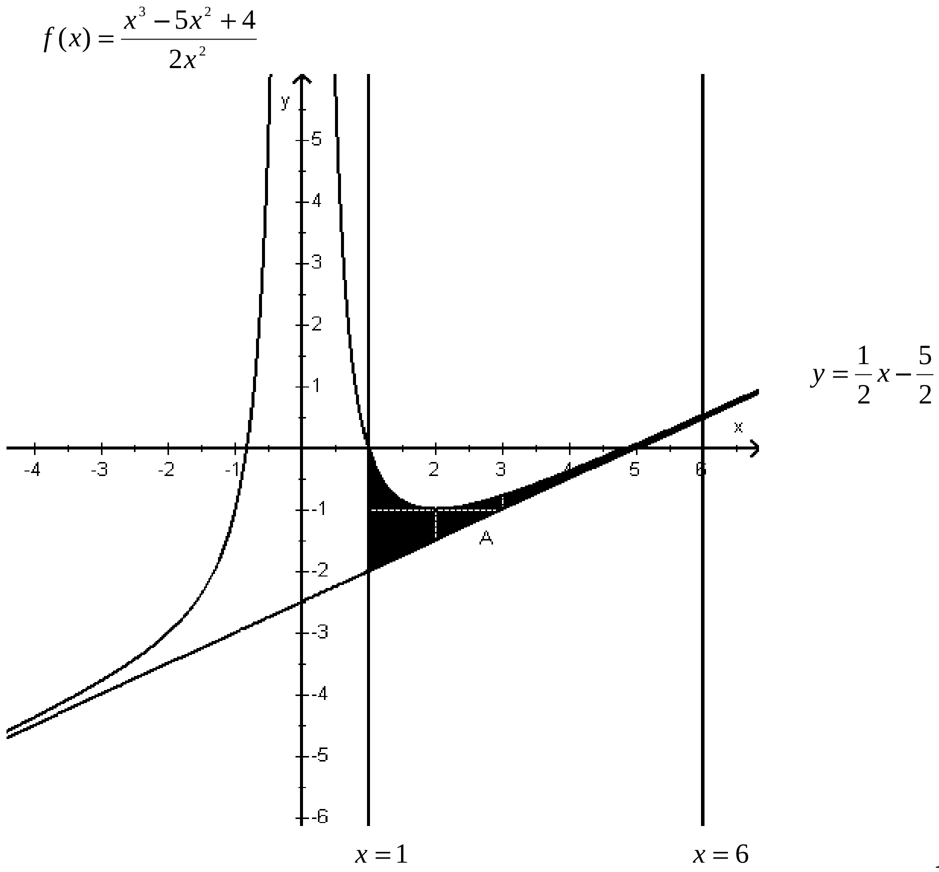


Abb. 18

3. Feststellen der Begrenzungen:

obere Funktion: $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{2x^2}$

untere Funktion: $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

linke x-Grenze: $x = 1$

rechte x-Grenze: $x = 6$

4. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\underline{A} = \int_1^6 \left(\frac{x^3 - 5x^2 + 4}{2x^2} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) \right) dx = \int_1^6 \left(\frac{x^3 - 5x^2 + 4}{2x^2} - \frac{x^3 - 5x^2}{2x^2} \right) dx = \int_1^6 \frac{2}{x^2}\, dx =$$

$$=\int_1^6 2x^{-2}dx = [-2x^{-1}]_1^6 = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^6 = \left(-\frac{2}{6}\right)-\left(-\frac{2}{1}\right)=\underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

6.2.4 Besondere Integrale, Uneigentliches Integral

In diese Rubrik fallen Integrale, deren Integrationsgrenze entweder ∞ oder eine Polstelle ist. Besitzt solch ein Integral einen endlichen Flächeninhalt so bezeichnet man es als „Uneigentliches Integral". Wie mit diesen Fällen praktisch umzugehen ist, kann den folgenden Beispielen entnommen werden.

Beispiel 1:

Das Schaubild der Funktion $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{2x^2}$, ihre schiefe Asymptote sowie $x=1$ begrenzen eine „nach rechts offene" Fläche. Untersuche, ob diese Fläche einen endlichen Inhalt besitzt.

1. Bestimmung der schiefen Asymptote (vgl. Kapitel 6.2.3):

$$(x^3-5x^2+4):(2x^2)=\overbrace{\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}}^{\text{schiefe Asympote}}+\overbrace{\frac{4}{2x^2}}^{\to 0 \text{ für } x\to\pm\infty}=\overbrace{\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}}^{\text{schiefe Asympote}}+\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0 \text{ für } x\to\pm\infty}$$

$$\begin{array}{l} -x^3 \\ \hline \quad -5x^2+4 \\ -(-5x^2) \\ \hline \qquad 4 \end{array}$$

Schiefe Asymptote: $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

2. Festelegen einer „vorläufigen" rechten Grenze: $x=b$

3. Veranschaulichung des Sachverhaltes

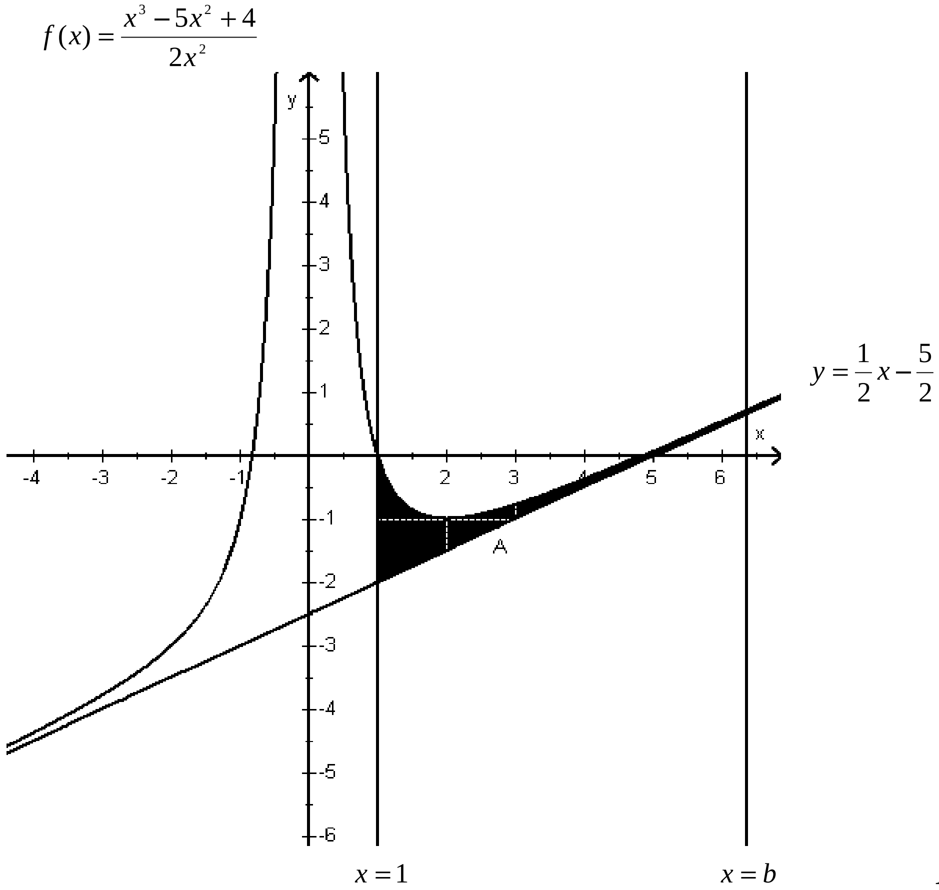


Abb. 19

4. Feststellen der Begrenzungen:

obere Funktion: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{2x^2}$

untere Funktion: $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

linke x-Grenze: $x=1$

rechte x-Grenze: $x=b$

5. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\underline{A(b)}=\int_1^b\left(\frac{x^3-5x^2+4}{2x^2}-(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2})\right)dx=\int_1^b\left(\frac{x^3-5x^2+4}{2x^2}-\frac{x^3-5x^2}{2x^2}\right)dx=$$

$$= \int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx = \int_1^b 2x^{-2}dx = [-2x^{-1}]_1^b = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^b = \left(-\frac{2}{b}\right) - \left(-\frac{2}{1}\right) = \underline{2 - \frac{2}{b}}$$

6. Bilden des Grenzwertes:

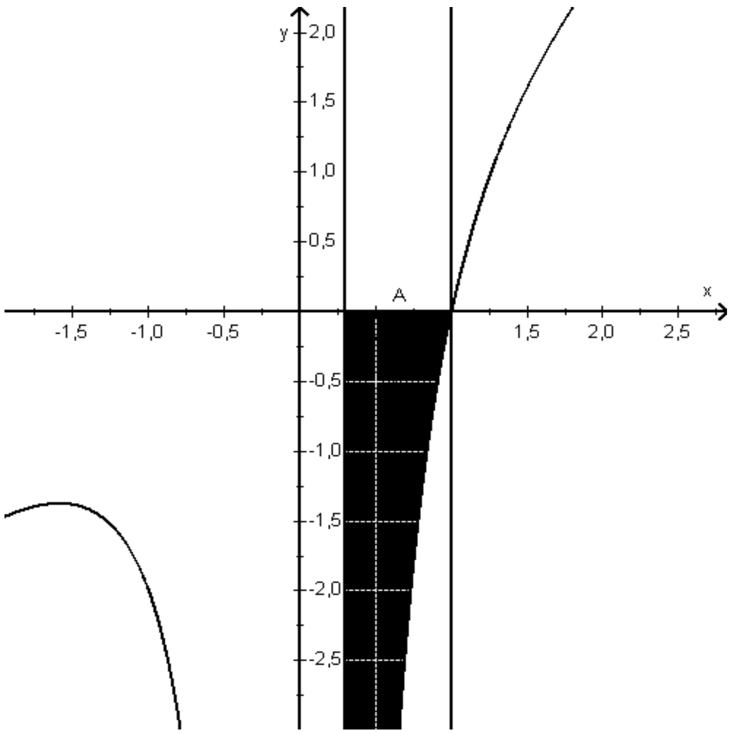
$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty}(2 - \underbrace{\frac{2}{b}}_{\to 0}) = \underline{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Der Flächeninhalt ist also endlich.}$$

<u>Beispiel 2:</u>

Das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2}$, die Koordinatenachsen sowie $x = 1$ begrenzen eine „nach unten offene“ Fläche. Untersuche, ob diese Fläche einen endlichen Inhalt besitzt.

1. Festlegen einer „vorläufigen“ linken Grenze: $x = a$

2. Veranschaulichung des Sachverhaltes



$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2}$

$x = a$ $\quad x = 1$

Abb. 20

3. Feststellen der Begrenzungen:

obere Funktion: $g(x)=0$

untere Funktion: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2}$

linke x-Grenze: $x=a$

rechte x-Grenze: $x=1$

5. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\underline{A(a)}=\int_a^1\left(0-\frac{x^3+x^2-2}{x^2}\right)dx=\int_a^1\left(-x-1+\frac{2}{x^2}\right)dx=\int_a^1(-x-1+2x^{-2})\,dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-x+2x^{-1}\right]_a^1=\left[-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{2}{x}\right]_a^1$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-1+2\right)-\left(-\frac{1}{2}a^2-a+\frac{2}{a}\right)=\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2+a-\frac{2}{a}}$$

6. Bilden des Grenzwertes:

$$\lim_{a\to 0}A(a)=\lim_{a\to 0}\Big(\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}a^2}_{\to 0}+\underbrace{a}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{a}}_{\to\infty}\Big)\quad \text{existiert nicht!}$$

$$\underline{a\to 0: A(a)\to\infty}$$

Die Fläche besitzt also keinen endlichen Inhalt.

6.3 Der Rauminhalt von Rotationskörpern

Rotiert eine Fläche um die x-Achse, so erhält man das Volumen des damit entstehenden Rotationskörpers aus:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

$f(x)$: oben begrenzende Funktion, $g(x)$: unten begrenzende Funktion
a: linke x-Grenze, b: rechte x-Grenze

Beispiel:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2x^2} + 1$ begrenzt zusammen mit der Funktion $g(x) = 3$ sowie $x = 4$ eine Fläche. Bestimme das Volumen des Körpers, das durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht.

1. Veranschaulichung des Sachverhaltes:

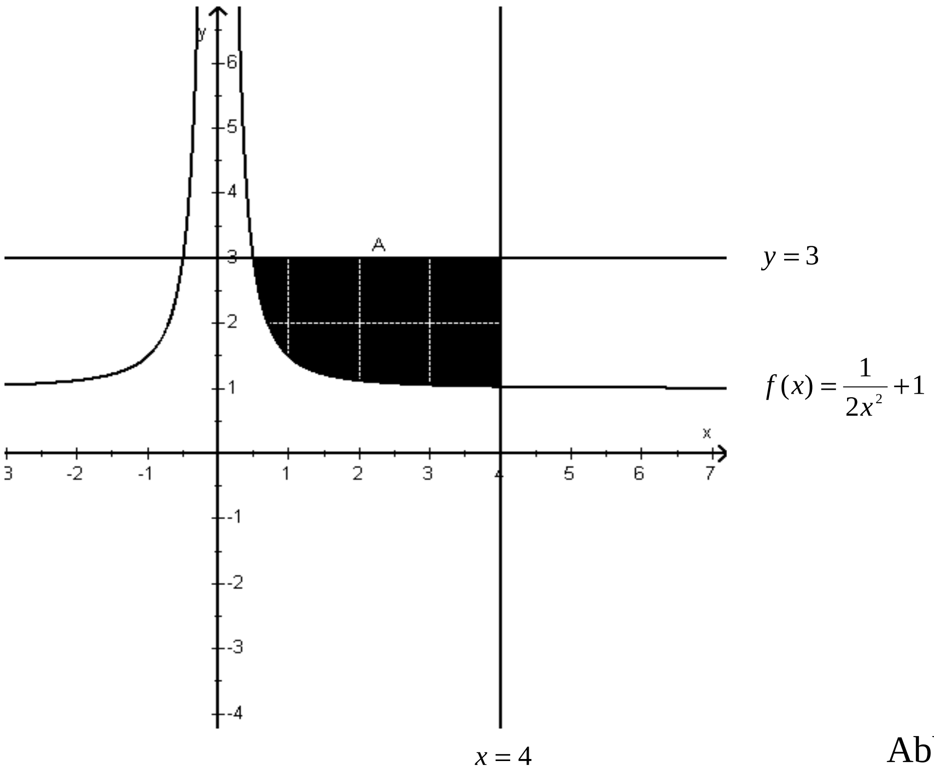


Abb. 21

2. Feststellen der bis jetzt bekannten Begrenzungen:

obere Funktion: $g(x) = 3$

untere Funktion: $f(x) = \frac{1}{2x^2} + 1$

rechte x-Grenze: $x = 4$

3. Berechnung der fehlenden Integrationsgrenze:

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2x^2} + 1 = 3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\mathrm{x}^2} = 2$$

$$\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = 0{,}5, \quad (x_2 = -0{,}5)}$$

linke x-Grenze: $x = 0{,}5$

4. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Rauminhaltes:

$$\underline{V} = \pi \cdot \int_{0,5}^{4} \left(3^2 - (\frac{1}{2x^2} + 1)^2 \right) dx = \pi \cdot \int_{0,5}^{4} \left(9 - (\frac{1}{4x^4} + 2 \cdot \frac{1}{2x^2} + 1) \right) dx =$$

$$= \pi \cdot \int_{0,5}^{4} \left(8 - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \cdot \int_{0,5}^{4} (8 - \frac{1}{4} x^{-4} - x^{-2})\, dx =$$

$$= \pi \cdot \left[8x + \frac{1}{12} x^{-3} + x^{-1} \right]_{0,5}^{4} = \pi \cdot \left[8x + \frac{1}{12x^3} + \frac{1}{x} \right]_{0,5}^{4} =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(32 + \frac{1}{768} + \frac{1}{4} \right) - \left(4 + \frac{2}{3} + 2 \right) \right] = \underline{\frac{19649}{768} \cdot \pi \approx 80{,}38}$$