7. Funktionsscharen

Unter Funktionsscharen verstehen wir Funktionen, die außer der üblichen Variablen (meist x) auch noch wenigstens einen Parameter (meist t oder k) enthalten. Im Folgenden werden die typischen Aufgabenfälle vorgestellt, mit denen man es bei e-Funktionen mit Parametern zu tun bekommt.

7.1 Punktprobe

Beispiel: Für welchen Wert des Parameters t verläuft das Schaubild der Funktion $f_t(x) = (2t + x) \cdot e^x$ ($t \in \mathbb{R}$) durch den Punkt $P(1/3)$?

Die Bedingung $f_t(1) = 3$ liefert:

$$3 = (2t+1) \cdot e \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{e} = 2t+1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{e} - 1) \quad \Rightarrow \quad \underline{t = \frac{3-e}{2e}}$$

7.2 Gemeinsamer Punkt

Einige Funktionsscharen haben die Eigenschaft, dass alle Funktionen der Schar durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Dieser gemeinsame Schnittpunkt aller Funktionen darf damit nicht von dem Parameter abhängen.

Beispiel: Zu zeigen ist, dass alle Schaubilder der Funktionsschar $f_t(x) = (x+1) \cdot e^{tx}$ ($t \in \mathbb{R}$) durch zwei gemeinsame Punkte verlaufen.

1. Betrachten zweier allgemeiner Funktionen der Schar:

$$f_{t_1}(x) = (x+1) \cdot e^{t_1 x} \quad \text{und} \quad f_{t_2}(x) = (x+1) \cdot e^{t_2 x}, \text{ mit } t_1 \neq t_2$$

2. Gleichsetzen und Umformen liefert:

$$(x+1)\cdot e^{t_1 x} = (x+1)\cdot e^{t_2 x} \quad \Rightarrow \quad (x+1)\cdot e^{t_1 x} - (x+1)\cdot e^{t_2 x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x+1)\cdot (e^{t_1 x} - e^{t_2 x}) = 0$$

3. Anwenden des Satzes vom Nullprodukt:

1. Fall: $x+1=0 \Rightarrow \underline{x=-1}$

2. Fall: $e^{t_1 x} - e^{t_2 x} = 0 \Rightarrow \underline{x=0}$, da $t_1 \neq t_2$

4. Berechnung der y-Werte:

$$f_t(-1) = (-1+1)\cdot e^{t\cdot(-1)} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{S_1(-1/0)}$$

$$f_t(0) = (0+1)\cdot e^{t\cdot 0} = \underline{1} \quad \Rightarrow \quad \underline{S_2(0/1)}$$

Wie man leicht erkennt, sind die Schnittpunkte der zwei betrachteten allgemeinen Funktionen der Schar unabhängig von *t*. Damit handelt es sich um zwei gemeinsame Punkte aller Funktionen der Schar.

7.3 Einfluss des Parameters auf Anzahl und Art von Lösungen

Sehr häufig sind im Zusammenhang mit Funktionsscharen Problemstellungen zu untersuchen, die auf das Lösen von Gleichungen führen (z.B. Bestimmen von Nullstellen, Extrempunkten, Wendepunkten etc.). Da solch eine Gleichung im Allgemeinen den Parameter enthält, spielt dieser bei der Lösbarkeit der Gleichung oft eine entscheidende Rolle. Die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter hängt dabei meist von folgenden Faktoren ab:

Fall:	Auftreten des Parameters:	Bedeutung für die Lösbarkeit:
1.	Der Parameter steht in einer Wurzel	Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen
2.	Der Parameter steht im Logarithmus	Im Logarithmus darf nur etwas Positives stehen
3.	Der Parameter steht im Nenner	Der Nenner darf nicht 0 werden

Bei der Untersuchung auf Extrempunkte kann zudem noch der Fall auftreten, dass die Entscheidung darüber, um welche Art von Extrempunkt es sich handelt, nur im Rahmen einer Fallunterscheidung getroffen werden kann.

Die beschriebenen Fälle wollen wir nachfolgend anhand von Beispielen näher beleuchten.

<u>Beispiel 1:</u> Betrachtet wird die Funktion $f_t(x) = (x^2 + tx + 4) \cdot e^{2x}$, mit $t \in \mathbb{R}$. Wie hängt die Anzahl der Nullstellen der Funktionsschar von *t* ab?

1. Berechnung der Nullstellen:

Notwendige Bedingung: $f_t(x) = 0$

$$(x^2 + tx + 4) \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + tx + 4) = 0$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ($x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$) ergibt sich:

$$x_{1/2} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 16}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{x_1 = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16}}{2}}, \quad \underline{x_2 = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16}}{2}}$$

2. Untersuchung der Lösungen:

Die Anzahl der Nullstellen hängt nun davon ab, welches Vorzeichen die Diskriminante ($D = b^2 - 4ac$) annimmt:

0 Lösungen für $t^2 - 16 < 0 \Rightarrow t \in]-4;4[$
1 Lösung für $t^2 - 16 = 0 \Rightarrow t = -4 \vee t = 4$
2 Lösungen für $t^2 - 16 > 0 \Rightarrow t \in \mathbb{R} \setminus [-4;4]$

<u>Beispiel 2:</u> Betrachtet wird die Funktion $f_t(x) = e^{2x} + 3tx$, mit $t \in \mathbb{R}^+$. Für welche Werte des Parameters kann das Schaubild die Steigung 2 annehmen? An welcher Stelle geschieht dies?

1. Bestimmung der Ableitung: $f'(x) = 2e^{2x} + 3t$

2. Aufstellen und Lösen der Bedingung:

$$2e^{2x} + 3t = 2 \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = \frac{2-3t}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \frac{1}{2}\ln(\frac{2-3t}{2})}$$

3. Untersuchung der Lösung:

Bedingung: $\frac{2-3t}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 3t > 0 \quad \Rightarrow \quad t < \frac{2}{3}$

Unter Berücksichtigung der Definitionsmenge für *t*: $\underline{0 < t < \frac{2}{3}}$

<u>Beispiel 3:</u> Betrachtet wird die Funktion $f_t(x) = (tx - 2) \cdot e^{-x}$, mit $t \in \mathbb{R}$. Für welche Werte des Parameters besitzt das Schaubild einen Extrempunkt? Um welche Art des Extremums handelt es sich?

1. Bilden der 1. und 2. Ableitung:

$$f_t'(x) = t \cdot e^{-x} + (tx - 2) \cdot (-e^{-x}) = (-tx + t + 2) \cdot e^{-x}$$

$$f_t''(x) = -t \cdot e^{-x} + (-tx + t + 2) \cdot (-e^{-x}) = (tx - 2t - 2) \cdot e^{-x}$$

2. Berechnung des Extrempunktes:

<u>Notwendige Bedingung</u>: $f_t'(x) = 0$

$$f_t'(x) = (-tx + t + 2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0 \;\Rightarrow\; -tx + t + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = \frac{t+2}{t}},\ t \neq 0$$

<u>Hinreichende Bedingung:</u>

$$f_t''\left(\frac{t+2}{t}\right) = \left(t \cdot \frac{t+2}{t} - 2t - 2\right) \cdot e^{-\frac{t+2}{t}} = -t \cdot \underbrace{e^{-\frac{t+2}{t}}}_{>0}$$

<u>y-Wert</u>:

$$f_t\left(\frac{t+2}{2}\right) = \left(t \cdot \frac{t+2}{t} - 2\right) \cdot e^{-\frac{t+2}{t}} = \underline{t \cdot e^{-\frac{t+2}{t}}}$$

3. Fallunterscheidung: $f_t''\left(\frac{t+2}{t}\right) = -t \cdot \underbrace{e^{-\frac{t+2}{t}}}_{>0}$

<u>1. Fall:</u> $f_t''\left(\frac{t+2}{t}\right) < 0 \;\Rightarrow\; -t < 0 \;\Rightarrow\; t > 0:$ $\quad H\left(\frac{t+2}{t} / t \cdot e^{-\frac{t+2}{t}}\right)$

<u>2. Fall:</u> $f_t''\left(\frac{t+2}{t}\right) > 0 \;\Rightarrow\; -t > 0 \;\Rightarrow\; t < 0:$ $\quad T\left(\frac{t+2}{t} / t \cdot e^{-\frac{t+2}{t}}\right)$

<u>3. Fall:</u> $t = 0:$ kein Extrempunkt

7.4 Die Ortskurve / Ortslinie

Bestimmt man bei Funktionsscharen z.B. Extrempunkte, Wendepunkte oder sonstige Punkte, so hängen diese im Allgemeinen vom Parameter ab. Zeichnet man solche Punkte für verschiedene Werte des Parameters in ein Koordinatensystem ein, so liegen diese Punkte wieder auf dem Schaubild einer Funktion. Diese Funktion nennt man Ortskurve oder Ortslinie.

<u>Beispiel:</u> Betrachtet wird die Funktion $f_t(x) = (e^x - t)^2$, mit $t \in \mathbb{R}^+$. Wie lautet die Funktionsvorschrift, die den geometrischen Ort des Wendepunktes beschreibt?

1. Bilden der 3 Ableitungen:

$$f_t{}'(x) = 2 \cdot (e^x - t) \cdot e^x = 2e^x \cdot (e^x - t)$$

$$f_t{}''(x) = 2e^x \cdot (e^x - t) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x \cdot (2e^x - t)$$

$$f_t{}'''(x) = 2e^x \cdot (2e^x - t) + 2e^x \cdot 2e^x = 2e^x \cdot (4e^x - t)$$

2. Berechnung des Wendepunktes:

<u>Notwendige Bedingung</u>: $f_t{}''(x) = 0$

$$f_t{}''(x) = \underbrace{2e^x}_{\neq 0} \cdot (2e^x - t) = 0 \;\Rightarrow\; 2e^x - t = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = \ln\frac{t}{2}}$$

<u>Hinreichende Bedingung:</u>

$$f_t{}'''(\ln\frac{t}{2}) = 2e^{\ln\frac{t}{2}} \cdot (4e^{\ln\frac{t}{2}} - t) = t \cdot (2t - t) = t^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Wendepunkt}$$

<u>y-Wert</u>:

$$f_t(\ln\frac{t}{2}) = (e^{\ln\frac{t}{2}} - t)^2 = (\frac{t}{2} - t)^2 = \frac{t^2}{4} \;\Rightarrow\; \underline{W(\ln\frac{t}{2} / \frac{t^2}{4})}$$

3. Bestimmen der Ortskurve:

$$W(\ln\frac{t}{2} / \frac{t^2}{4}) \;\Rightarrow\; x = \ln\frac{t}{2} \;\Rightarrow\; t = 2e^x \quad \text{eingesetzt in y:}$$

$$\underline{y} = \frac{t^2}{4} = \frac{(2e^x)^2}{4} = \frac{4e^{2x}}{e} = \underline{e^{2x}}$$

Der Wendepunkt der Funktionsschar liegt damit auf der Kurve mit der Gleichung $g(x) = e^{2x}$.

4. Veranschaulichung des Sachverhaltes:

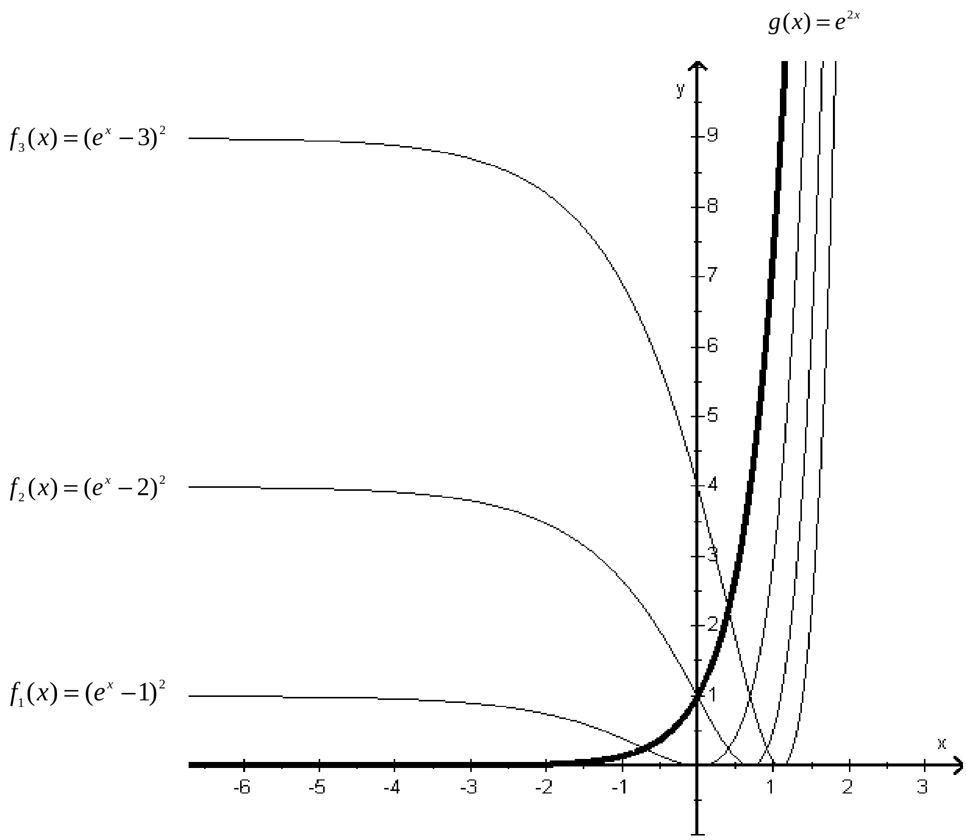

Abb. 21

7.5 Berühren und senkrecht schneiden

Die Schaubilder zweier Funktionen *f* und *g* berühren sich an der Stelle x_s, wenn gilt:

$$f(x_s) = g(x_s) \quad \wedge \quad f'(x_s) = g'(x_s)$$

(gemeinsamer Punkt $\wedge$ gleiche Steigung)

Die Schaubilder zweier Funktionen f und g scheiden sich an der Stelle x_s senkrecht (sind zueinander orthogonal), wenn gilt:

$$f(x_s) = g(x_s) \quad \wedge \quad f'(x_s) \cdot g'(x_s) = -1$$

(gemeinsamer Punkt $\wedge$ Orthogonalität)

Beispiel: Betrachtet werden die Funktionen $f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2$, mit $t > 0$, sowie $g(x) = e^{2x}$. Wie muss t gewählt werden, damit sich die Schaubilder der Funktionen orthogonal schneiden?

1. Bilden der 1. Ableitungen:

$$f_t'(x) = 2e^{2x} - 2te^x$$

$$g'(x) = 2e^{2x}$$

2. Bedingungen für orthogonalen Schnitt:

$$f_t(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad e^{2x} - 2te^x + t^2 = e^{2x} \qquad (1)$$

$$f_t'(x) \cdot g'(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad (2e^{2x} - 2te^x) \cdot 2e^{2x} = -1 \qquad (2)$$

3. Aus Gleichung (1) erhält man:

$$e^{2x} - 2te^x + t^2 = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad -2te^x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{t}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(-2e^x + t)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$e^x = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \ln \frac{t}{2}}$$

4. Eingesetzt in Gleichung (2) ergibt sich:

$$(2e^{2\ln\frac{t}{2}} - 2te^{\ln\frac{t}{2}}) \cdot 2e^{2\ln\frac{t}{2}} = -1 \;\Rightarrow\; (2e^{\ln\frac{t^2}{4}} - 2t \cdot \frac{t}{2}) \cdot 2e^{\ln\frac{t^2}{4}} = -1 \;\Rightarrow$$

$$(2 \cdot \frac{t^2}{4} - t^2) \cdot 2\frac{t^2}{4} = -1 \;\Rightarrow\; -\frac{t^2}{2} \cdot \frac{t^2}{2} = -1 \;\Rightarrow\; t^4 = 4 \;\Rightarrow\; t = \pm\sqrt[4]{4} \;\Rightarrow$$

$$t = \pm\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \underline{t = \sqrt{2}} \;\; (\text{da } t > 0)$$

7.6 Parameter in der Integralrechnung

Häufig ergeben sich Bedingungen die ein Parameter erfüllen muss auch aus typischen Aufgaben der Integralrechnung. Ein dabei häufiger Fall wird in folgendem Beispiel vorgestellt.

Beispiel: Die Schaubilder der Funktionen $f_t(x) = (2t - x)e^{0,25x}$ $(t > 0)$ und $g(x) = (2 - x)e^{0,25x}$ umschließen mit der y-Achse und der Gerade $x = -4$ eine Fläche mit dem Inhalt *A(t)*. Wie ist *t* zu wählen, damit gilt: $A(t) = 8(e-1)$?

1. Veranschaulichung des Sachverhaltes für $t = 2$ und $t = 0,5$:

Wie man dem nachfolgenden Schaubild entnehmen kann, ist eine eindeutige Zuordnung, welche Funktion die Fläche von oben bzw. von unten begrenzt, nicht möglich. Aus diesem Grund müssen wir bei der Flächenberechnung den Betrag zu Hilfe nehmen.

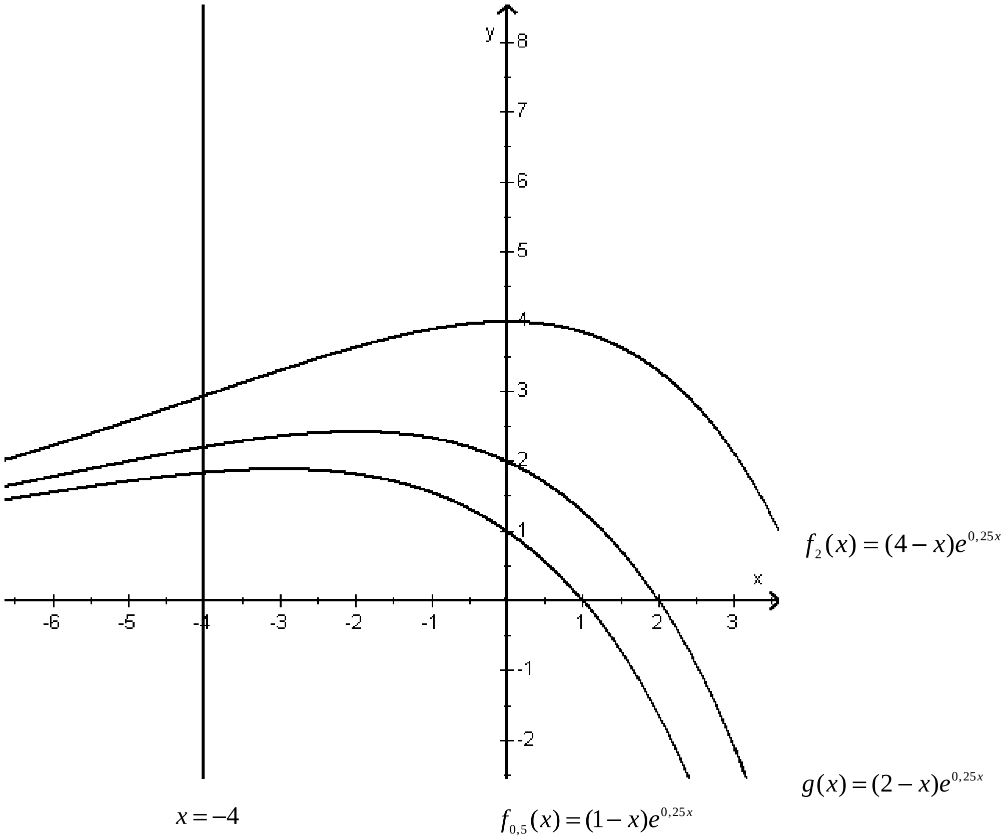

Abb. 22

2. Feststellen der Begrenzungen:

obere bzw. untere Funktion: $f_t(x) = (2t-x)e^{0,25x}$

untere bzw. obere Funktion: $g(x) = (2-x)e^{0,25x}$

linke x-Grenze: $x = -4$

rechte x-Grenze: $x = 0$

3. Aufstellen des Integrals und Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\underline{A(t)} = \left|\int_{-4}^{0} ((2t-x)e^{0,25x} - (2-x)e^{0,25x})dx\right| = \left|\int_{-4}^{0} (2te^{0,25x} - 2e^{0,25x})dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-4}^{0} (2t-2)e^{0,25x})dx\right| = \left|[4\cdot(2t-2)e^{0,25x}]_{-4}^{0}\right| = \left|[8(t-1)e^{0,25x}]_{-4}^{0}\right| =$$

$$= \left|8(t-1)e^{0,25\cdot 0} - 8(t-1)e^{0,25\cdot(-4)}\right| = \left|8(t-1) - 8(t-1)e^{-1}\right| =$$

$$= \underline{\left|8(t-1)(1-e^{-1})\right|}$$

3. Aufstellen der Fallunterscheidung:

<u>Forderung:</u> $\left|8(t-1)(1-e^{-1})\right| = 8(e-1)$

<u>1. Fall:</u> $8(t-1)(1-e^{-1}) = 8(e-1)$

<u>2. Fall:</u> $8(t-1)(1-e^{-1}) = -8(e-1)$

4. Berechnung von *t*:

<u>1. Fall:</u>

$$8(t-1)(1-e^{-1}) = 8(e-1) \quad \Rightarrow \quad t-1 = \frac{e-1}{1-e^{-1}} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{t} = \frac{e-1}{1-\frac{1}{e}} + 1 = \frac{e-1}{\frac{e-1}{e}} + 1 = \frac{(e-1)\cdot e}{e-1} + 1 = \underline{e+1}$$

<u>2. Fall:</u>

$$8(t-1)(1-e^{-1}) = -8(e-1) \quad \Rightarrow \quad t-1 = \frac{-(e-1)}{1-e^{-1}} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{t} = \frac{-(e-1)}{1-\frac{1}{e}} + 1 = \frac{-(e-1)}{\frac{e-1}{e}} + 1 = \frac{-(e-1)\cdot e}{e-1} + 1 = \underline{-e+1}$$

$= -e+1 < 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung, da $t > 0$ gelten muss.