7. Spiegelungen

7.1 Spiegelung Punkt an Punkt (P-P)

Spiegelung von P an F:

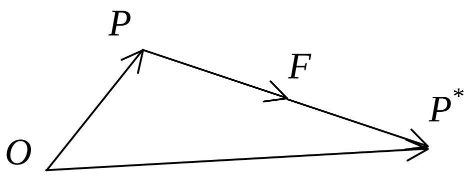

Abb. 26

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$

Beispiel: Spiegele den Punkt $P(2/1/-3)$ am Punkt $F(-1/3/2)$.

$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{P^*(-4/5/7)}$$

7.2 Spiegelung Punkt an Gerade (P-g)

Spiegelung von P an g:

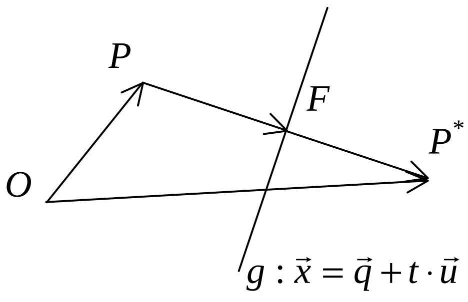

Abb. 27

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$

Beispiel: $P(-2/-6/1)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Aufstellen der Hilfsebene in Normalenform (vgl. Kapitel 6.6):

Aufpunkt: $P(-2/-6/1)$, $\quad$ Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -16$$

2. Schnitt von g mit E liefert Fußpunkt F (vgl. Kapitel 4.6.2):

$$3 \cdot (5 + 3t) + 2 \cdot (9 + 2t) + 2 \cdot (1 + 2t) = -16 \quad \Rightarrow \quad 17t = -51 \quad \Rightarrow \quad t = -3$$

3. $t = -3$ in g eingesetzt liefert: $\quad F(-4/3/-5)$

4. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{P^*(-6/12/-11)}$$

7.3 Spiegelung Gerade an Gerade (g-g)

Eine Gerade *g* kann nur an einer Geraden *h* gespiegelt werden, wenn die Geraden zueinander parallel sind oder sich schneiden. Dies muss gegebenenfalls noch untersucht werden (vgl. Kapitel 3.3).

7.3.1 Parallele Geraden

Spiegelung von *g* an *h*:

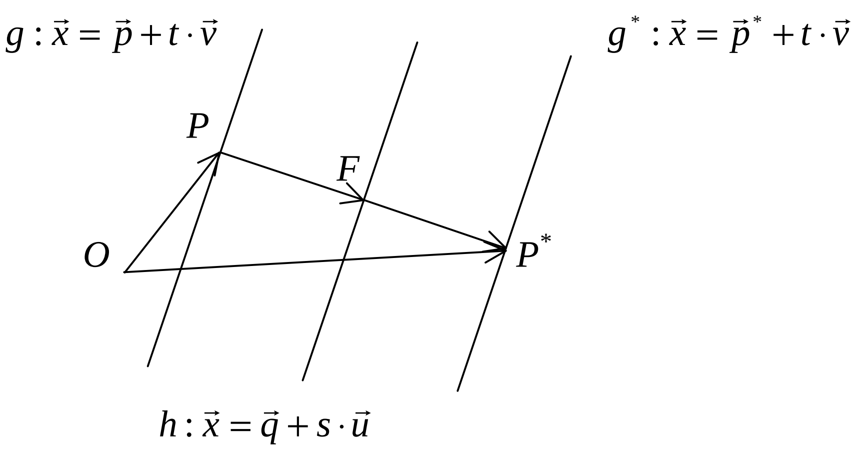

Abb. 28

$$g^*: \vec{x} = \vec{p}^* + t \cdot \vec{v}\text{, mit } \overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Aufstellen der Hilfsebene in Normalenform (vgl. Kapitel 6.5):

Aufpunkt: $P(-2/-6/1)$, $\qquad$ Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\-6\\1\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=0 \;\Rightarrow\; E:3x_1+2x_2+2x_3=-16$$

2. Schnitt von *h* mit *E* liefert Fußpunkt *F* (vgl. Kapitel 4.6.2):

$$3\cdot(5+3s)+2\cdot(9+2s)+2\cdot(1+2s)=-16 \quad\Rightarrow\quad 17s=-51 \quad\Rightarrow\quad s=-3$$

3. $s=-3$ in *h* eingesetzt liefert: $F(-4/3/-5)$

4. $\overrightarrow{OP^*}=\overrightarrow{OP}+2\cdot\overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*}=\begin{pmatrix}-2\\-6\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-2\\9\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\12\\-11\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{P^*(-6/12/-11)}\Rightarrow \underline{g^*:\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\12\\-11\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}}$$

7.3.2 Sich schneidende Geraden

Spiegelung von *g* an *h*:

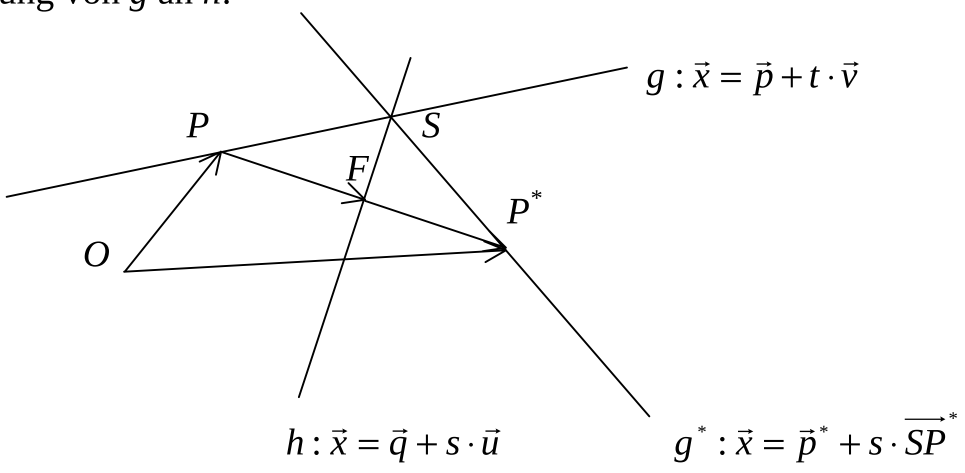

Abb. 29

$$g^* : \vec{x} = \vec{p}^{\,*} + s \cdot \overrightarrow{SP}^{*} \text{, mit } \overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$

<u>Beispiel:</u> $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

schneiden sich im Punkt $S(2/1/3)$ (vgl. Kapitel 3.3, Beispiel 2).

1. Aufstellen der Hilfsebene in Normalenform (vgl. Kapitel 6.6):

Aufpunkt: $P(0/1/1)$, Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad E : 2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

2. Schnitt von *h* mit *E* liefert Fußpunkt *F* (vgl. 4.6.2):

$$2 \cdot (4 + 2r) + 1 \cdot (2 + r)1 + 1 \cdot (4 + 3) = 2 \quad \Rightarrow \quad 6r = -12 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r} = -2$$

3. $r = -2$ in *g* eingesetzt liefert: $F(0/0/2)$

4. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P^*(0/-1/3) \Rightarrow \overrightarrow{SP}^* = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{g^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

7.4 Spiegelung Punkt an Ebene (P-E)

Spiegelung von *P* an *E*:

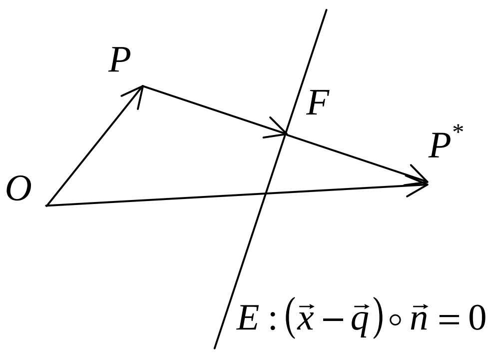

Abb. 30

$$\boxed{\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}}$$

Beispiel: $P(3/-1/2)$ $\quad E: 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -45$

1. Bilde Lotgerade *l* aus *P* und $\vec{n}$:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. Schnitt von l mit E liefert Fußpunkt F (vgl. Kapitel 4.6.2):

$$2\cdot(3+2t)+3\cdot(-1+3t)-5\cdot(2-5t)=-45 \quad\Rightarrow\quad 38t=-38 \quad\Rightarrow\quad t=-1$$

3. $t=-1$ in l eingesetzt liefert: $F(1/-4/7)$

4. $\overrightarrow{OP^*}=\overrightarrow{OP}+2\cdot\overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\12\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \underline{P^*(-1/-7/12)}$$

7.5 Spiegelung Gerade an Ebene (g-E)

Eine Gerade g kann nur an einer Ebene E gespiegelt werden, wenn die Gerade parallel zur Ebene ist oder die Ebene schneidet. Dies muss gegebenenfalls noch untersucht werden (vgl. Kapitel 4.6).

7.5.1 Gerade parallel zur Ebene

Spiegelung von g an E

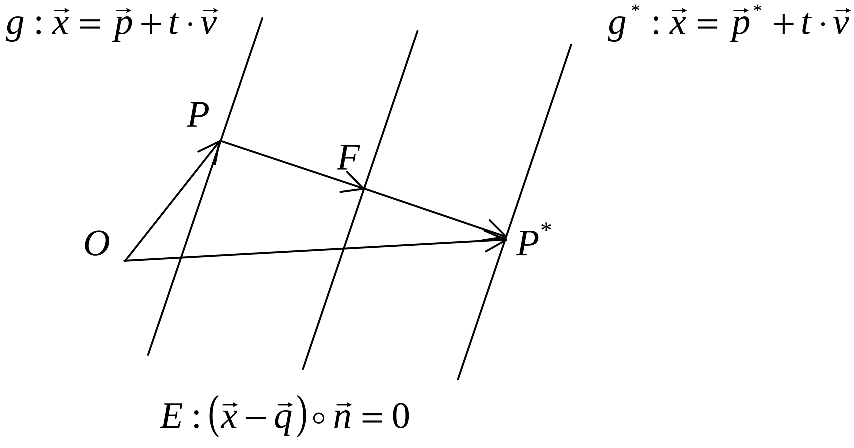

Abb. 31

$$g^* : \vec{x} = \vec{p}^{\,*} + t \cdot \vec{v}\text{, mit } \overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$

Beispiel: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -45$

1. Bilde Lotgerade l aus dem Aufpunkt P der Geraden g und $\vec{n}$:

$$l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. Schnitt von l mit E liefert Fußpunkt F (vgl. 4.6.2):

$$2 \cdot (3 + 2t) + 3 \cdot (-1 + 3t) - 5 \cdot (2 - 5t) = -45 \quad \Rightarrow \quad 38t = -38 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

3. $t = -1$ in l eingesetzt liefert: $\qquad F(1/-4/7)$

4. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^*(-1/-7/12)$$

$$\Rightarrow \underline{g^* : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

7.5.2 Gerade schneidet Ebene

Spiegelung von g an E:

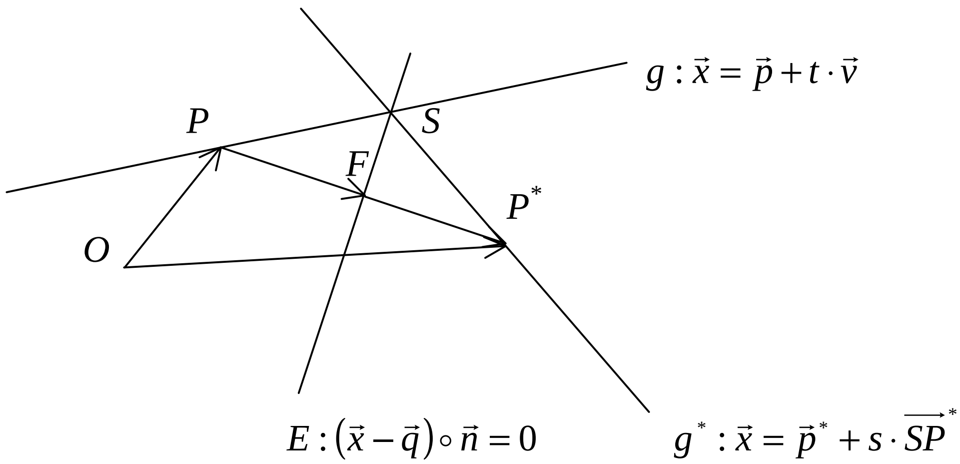

Abb. 32

$$g^*: \vec{x} = \vec{p}^* + s \cdot \overrightarrow{SP}^*, \text{ mit } \overrightarrow{OP}^* = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad E: 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 49 = 0$

schneiden sich im Punkt $S(9/7/4)$ (vgl. Kapitel 4.6.2).

1. Bilde Lotgerade l aus P und $\vec{n}$:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Schnitt von *l* mit *E* liefert Fußpunkt *F* (vgl. Kapitel 4.6.2):

$$2\cdot(3+2t)+5\cdot(4+5t)-1\cdot(7-t)=49 \quad\Rightarrow\quad 30t=30 \quad\Rightarrow\quad t=1$$

3. $t=1$ in *l* eingesetzt liefert: $F(5/9/6)$

4. $\overrightarrow{OP^*}=\overrightarrow{OP}+2\cdot\overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\14\\5\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; P^*(7/14/5) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{SP}^*=\begin{pmatrix}-2\\7\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; \underline{g^*=\begin{pmatrix}7\\14\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\7\\1\end{pmatrix}}$$

7.6 Spiegelung Ebene an Ebene (E-E)

Eine Ebene *E* kann nur an einer Ebene *H* gespiegelt werden, wenn die Ebenen zueinander parallel sind oder sich schneiden. Dies muss gegebenenfalls noch untersucht werden (vgl. Kapitel 4.9).

7.6.1 Parallele Ebenen

Spiegelung von E an H:

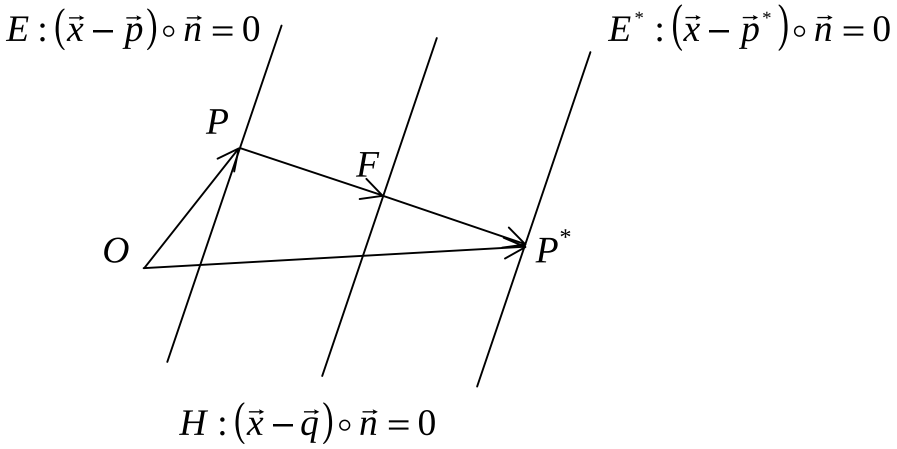

Abb. 33

$$E^*:(\vec{x}-\vec{p}^*)\circ\vec{n}=0\text{, mit } \overrightarrow{OP^*}=\overrightarrow{OP}+2\cdot\overrightarrow{PF}$$

<u>Beispiel:</u> $E:5x_1-x_2+x_3=-3$ $H:5x_1-x_2+x_3=-30$

1. Bestimme durch „Knobeln“ einen Punkt P auf E: $P(0/2/-1)$

2. Bilde Lotgerade l aus P und $\vec{n}$:

$$l:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

3. Schnitt von l mit H liefert Fußpunkt F (vgl. 4.6.2):

$$5\cdot5t-1\cdot(2-t)+1\cdot(-1+t)=-30\quad\Rightarrow\quad 27t=-27\quad\Rightarrow\quad t=-1$$

4. $t = -1$ in l eingesetzt liefert: $F(-5/3/-2)$

5. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}^*(-10/4/-3) \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}^* = \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{E}^* : 5x_1 - x_2 + x_3 = -57}$$

7.6.2 Sich schneidende Ebenen

Spiegelung von E an H:

E und H schneiden sich in der Schnittgerade g (senkrecht zur Blattebene).

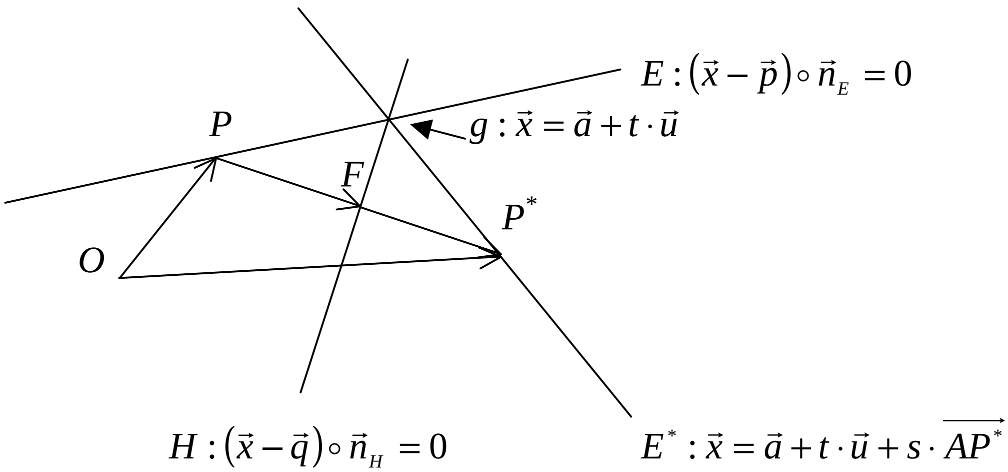

Abb. 34

$$\boxed{E^* : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \overrightarrow{AP^*}, \text{ mit } \overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} \text{ und } g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}.}$$

<u>Beispiel:</u> $E: 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$ $\qquad H: 2x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0$

1. E und H schneiden sich in der Schnittgeraden g (hier ohne explizite Rechnung; Berechnung analog Kapitel 4.9.2):

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A(1/2/-1)$$

2. Bestimme durch „Knobeln" einen Punkt P auf E: $P(0/3/-5)$

<u>Beachte:</u> Der „erknobelte" Punkt darf nicht gleichzeitig auf g liegen!

3. Bilde Lotgerade l aus P und $\vec{n}_H$:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Schnitt von l mit H liefert Fußpunkt F (vgl. Kapitel 4.6.2):

$$2 \cdot (0 + 2s) - 1 \cdot (3 - s) - 1 \cdot (-5 - s) = 1 \quad \Rightarrow \quad 6s = -1 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{6}$$

5. $s = -\frac{1}{6}$ in l eingesetzt liefert: $\qquad F(-\frac{1}{3}/\frac{19}{6}/-\frac{29}{6})$

6. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 10/3 \\ -14/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}^*(-\frac{2}{3} / \frac{10}{3} / -\frac{14}{3}) \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}^* : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2/3 - 1 \\ 10/3 - 2 \\ -14/3 + 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}^* : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ -11/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\mathrm{E}^* : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}}, \text{ mit } r = \frac{s}{3} \ .$$

7.7 Senkrechte Projektion einer Geraden auf eine Ebene

Projektion von *g* auf *E*:

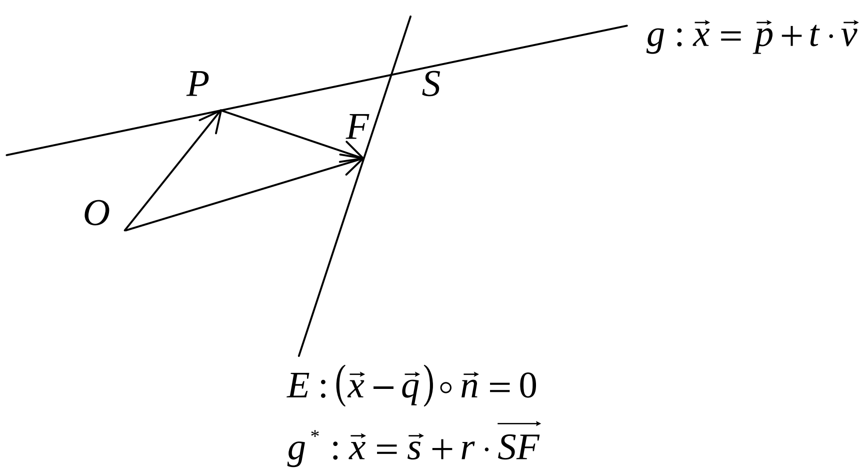

Abb. 35

$$g^* : \vec{x} = \vec{s} + r \cdot \overrightarrow{SF}$$

Beispiel: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad E : 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 49 = 0$

schneiden sich im Punkt $S(9/7/4)$ (vgl. Kapitel 4.6.2).

1. Bilde Lotgerade *l* aus *P* und $\vec{n}$:

$$l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Schnitt von *l* mit *E* liefert Fußpunkt *F* (vgl. Kapitel 4.6.2):

$$2 \cdot (3 + 2t) + 5 \cdot (4 + 5t) - 1 \cdot (7 - t) = 49 \quad \Rightarrow \quad 30t = 30 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

3. $t = 1$ in *l* eingesetzt liefert: $F(5/9/6)$

4. $g^* : \vec{x} = \vec{s} + r \cdot \overrightarrow{SF}$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{g}^* = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Anmerkung: Ist *g* parallel zu *E*, so erhält man die senkrechte Projektion der Gerade *g* zu

$g^* : \vec{x} = \overrightarrow{OF} + s \cdot \vec{v}$, mit *F* = Fußpunkt und $\vec{v}$ als Richtungsvektor von *g*.